

Álgebra Lineal I

TEMA II- Matrices y determinantes.

II.1. Matrices.

Definiciones básicas. Operaciones con matrices. Matrices especiales.

Luis Fuentes García (2026).



Matrices.

Definición.

Matriz: conjunto de $m \times n$ elementos dispuestos en m filas y n columnas.

Suelen denotarse con letras mayúsculas $A, B, C, \dots$

El elemento en la fila i , columna j de la matriz A se denota por a_{ij}

El conjunto de matrices $m \times n$ con elementos en K se denota por $M_{m \times n}(K)$

diagonal

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

a_{12} elemento en fila 1 columna 2

Matrices especiales.

Matriz cuadrada: Mismo número de filas y columnas.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ cuadrada} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ NO cuadrada}$$

2×2 2×3

Matriz fila: Matriz con una sola fila.

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1×2 1×4

Matriz columna: Matriz con una sola columna.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2×1 3×1

Matriz diagonal: Cuadrada. Ceros fuera de la diagonal.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior (inferior):

Cuadrada. Ceros debajo (encima) de la diagonal.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Triangular superior

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Triangular inferior



Matrices especiales.

Matrices especiales.

Matriz diagonal: Cuadrada. Ceros fuera de la diagonal.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular superior (inferior):

Cuadrada. Ceros debajo (encima) de la diagonal.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Triangular superior

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Triangular inferior

Se cumple que si A, B son **matrices cuadradas** y ambas son,

- **diagonales**
- **triangulares inferiores** ó
- **triangulares superiores,**

Entonces las operaciones $A + B, A \cdot B, k \cdot A, A^{-1}$ (si existe) conservan el mismo tipo de matriz. Es decir serían respectivamente:

- **diagonales,**
- **triangulares inferiores,** ó
- **triangulares superiores.**

Matriz identidad: Cuadrada. 1s en diagonal. 0s fuera de ella.

$$I = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz nula: Todos los elementos cero.

$$\Omega = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Operaciones con matrices: Suma y producto por escalar.

SUMA: Se suman matrices del mismo tamaño.

$$A, B \in M_{m \times n}(K), \quad C = A + B \in M_{m \times n}(K) \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+3 & 1+0 \\ 3+(-1) & 4+2 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- **Conmutativa:** $A + B = B + A$
- **Asociativa:** $A + (B + C) = (A + B) + C$
- **Elemento neutro:** Matriz nula 0 : $0 + A = A + 0 = A$
- **Elemento opuesto:** $-A$, $A + (-A) = (-A) + A = 0$

PRODUCTO POR ESCALAR: Se multiplican todos los elementos de la matriz por el número.

$$A \in M_{m \times n}(K), \quad C = k \cdot A \in M_{m \times n}(K) \quad c_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 9 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- **Distributiva (I):** $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
- **Distributiva (II):** $(k + t) \cdot A = k \cdot A + t \cdot A$
- $(k \cdot t) \cdot A = k \cdot (t \cdot A)$
- $1 \cdot A = A$



Operaciones con matrices: Producto de matrices.

El número de columnas de la **primera matriz** debe de coincidir con el número de filas de la segunda.

$$A \in M_{m \times n}(K), B \in M_{n \times p}(K), \quad C = A \cdot B \in M_{m \times p}(K) \quad c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

Labels for the first matrix: 1ª fila × 1ª columna, 1ª fila × 2ª columna, 1ª fila × 3ª columna, 2ª fila × 1ª columna, 2ª fila × 2ª columna, 2ª fila × 3ª columna.

FILAS por **COLUMNAS**

Propiedades:

- **Asociativa:** $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
 $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$
- **Distributiva:** $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
 $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$
- **Elemento neutro:** $A \cdot I = I \cdot A = A$

¡CUIDADO!

En general el **producto** de matrices **NO** es conmutativo.

- $A \cdot B \neq B \cdot A$
- $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$
- $(A - B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$
- $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$



Operaciones con matrices: Inversa y potencia de una matriz.

Inversa: Una matriz cuadrada $A \in M_{n \times n}(K)$ tiene **inversa** si existe $B \in M_{n \times n}(K)$ cumpliendo $A \cdot B = B \cdot A = I$

Si **existe** la inversa la matriz se dice **invertible** o **regular** o **no singular**; si **no existe**, **no invertible** o **singular**.

Propiedades:

- La **inversa** si existe es **única**.
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ **¡OJO! Cambio de orden.**
- $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$
- $I^{-1} = I$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

¡CUIDADO!

- Una **matriz NO** cuadrada **no** tiene inversa.
- Una matriz con **determinante nulo NO** tiene inversa.
- Una matriz con **columna o filas de ceros NO** tiene inversa
- $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$
- Para “**despejar**” importa el orden. Si **A** tiene inversa:

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$X \cdot A = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

Potencia de una matriz: Dada una matriz cuadrada $A \in M_{n \times n}(K)$ y un número entero $k \in \mathbb{Z}$.

$$A^k = \begin{cases} \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ veces}} & \text{si } k > 0 \\ I & \text{si } k = 0 \\ \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \dots \cdot A^{-1}}_{-k \text{ veces}} & \text{si } k < 0 \text{ y } A \text{ es invertible} \end{cases}$$

¡CUIDADO!

Debido a que el **producto** de matrices **NO** es conmutativo.

$$(A \cdot B)^k \neq A^k \cdot B^k$$



Operaciones con matrices: Traspuesta y traza.

Traspuesta: Se obtiene intercambiando el papel de filas y columnas.

$$A \in M_{m \times n}(K), \quad A^t \in M_{n \times m}(K) \quad (A^t)_{ij} = a_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad 3 \times 2$

Propiedades:

- $(A^t)^t = A$
- $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ ¡OJO! Cambio de orden.

Traza: Suma de los elementos de la diagonal de una matriz cuadrada.

$$A \in M_{n \times n}(K), \quad \text{traza}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$
$$\text{traza} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 5 \end{pmatrix} = -3 + 1 + 5 = 3$$

Propiedades:

- $\text{traza}(A + B) = \text{traza}(A) + \text{traza}(B)$.
- $\text{traza}(k \cdot A) = k \cdot \text{traza}(A)$
- $\text{traza}(A^t) = \text{traza}(A)$
- $\text{traza}(A \cdot B) = \text{traza}(B \cdot A)$ ¡OJO! El producto de matrices NO conmuta, pero la traza coincide)
- $\text{traza}(P^{-1}AP) = \text{traza}(A)$ (la semejanza de matrices conserva la traza)



Matrices simétricas y antisimétricas. Matriz ortogonal.

$A \in M_{n \times n}(K)$ matriz cuadrada

$$A \text{ simétrica} \Leftrightarrow A^t = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} * & C \\ C^t & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

simétrica

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

antisimétrica

$$A \text{ antisimétrica} \Leftrightarrow A^t = -A \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & C \\ -C^t & 0 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- Toda matriz **antisimétrica** tiene ceros en la diagonal.
- La única matriz **simétrica** y **antisimétrica** al mismo tiempo es la matriz nula.
- Toda matriz cuadrada se descompone de manera única como suma de una **simétrica** y otra **antisimétrica**.

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$$

simétrica antisimétrica

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}{2} + \frac{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

simétrica antisimétrica

Matriz ortogonal: $A \in M_{n \times n}(K)$ matriz cuadrada: $A \text{ ortogonal} \Leftrightarrow A^t = A^{-1} \Leftrightarrow A^t A = I \Leftrightarrow A A^t = I$

Están relacionadas con transformaciones que **preservan la distancia**.

